L.7.11 Sahline A.S :2006/2007

Devoir de Synthèse N°2

Durée : 3.h

Exercice N°1: (5pts)

Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 \end{cases}$

1/a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < U_n \leq \dfrac{1}{2}$

b) Montrer que U est une suite strictement décroissante

c) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite l

2/ On pose $V_n = \text{Log}U_n$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n < 0$

b) Montrer que V est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

d) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice N°2: (5pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

On considère les points A (-1,-1,1) ; B (-1, 2, -2) et le plan P dont une équation cartésienne est : $x + y + z - 2 = 0$

1/ Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P

2/ Soit α un réel et S_α l'ensemble des points de $M(x, y, z)$ de l'espace ξ tels que :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2\alpha y + 2\alpha z + \alpha^2 + \alpha = 0$

a) Montrer que pour tout réel α S_α est une sphère de centre $I_\alpha(-1, \alpha, -\alpha)$ et de rayon $R_\alpha = \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}$

b) Montrer que, quand α varie dans $\mathbb{R}$, I_α décrit la droite (AB)

3/ Etudier, suivant les valeurs de α, les positions relatives de S_α et du plan P

4/ Soit I le milieu de $[AB]$ et $I_{1-\alpha}$ le centre de la sphère $S_{1-\alpha}$

a) Montrer que I est le milieu du segment $[I_\alpha \; I_{1-\alpha}]$

b) En déduire que les sphères S_α et $S_{1-\alpha}$ sont symétriques par rapport au point I

Problème (10pts) :

I-

Soit f la fonction définie $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$; $\left(\ \|\vec{i}\|=4\text{cm}\ \right)$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, interpréter graphiquement les résultats obtenus

2/ Dresser le tableau de variation de f

3/ Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse 0

4/ Soit g la fonction définie par $g(x)=f(x)-x$

a) Etudier les variations de g

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que : $0,4<\alpha<0,5$

5/ Construire T et C

II -

1/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J dont on précisera

2/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in J$ (où f^{-1} est la fonction réciproque de f)

3)a) Donner le tableau de variation de $f^{-1}(x)$

b) Donner une équation de la tangente T' à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$

c) Construire T' et $C_{f^{-1}}$ dans le repère R

III-

1/ Vérifier que : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

2/ Donner une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

3/ Montrer que $F(0)-F(-1)=\text{Log}(\dfrac{1+e}{2})$